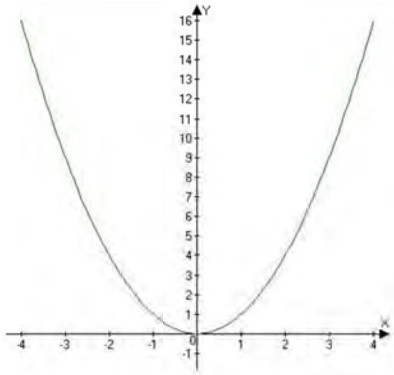
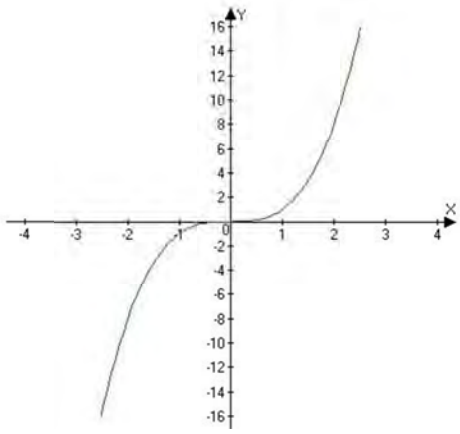
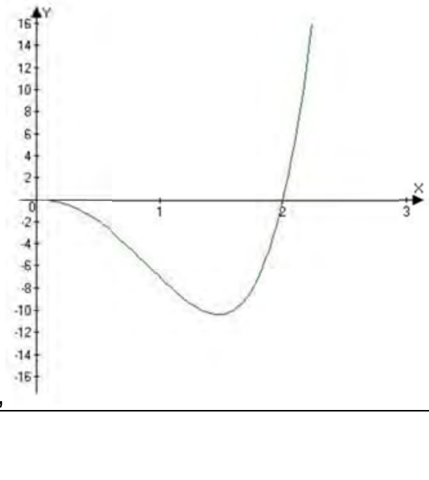
3. Функции

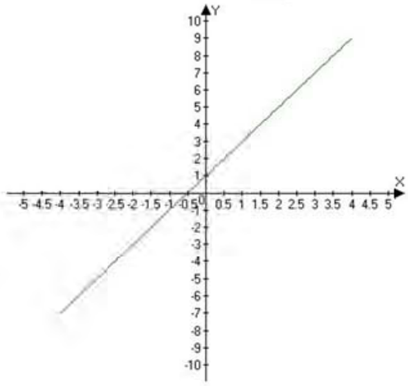
Понятие функции	✓ Зависимость одной переменной от другой называются функциональными зависимостями. ✓ Зависимость переменной у от переменной х называется функцией, если каждому значению х соответствует единственное значение у. При этом используется запись $y = f(x)$. $f(x_0)$ - значение функции в точке x_0 ✓ Переменную х называют независимой переменной или аргументом, а переменную у – зависимой переменной. Говорят, что у является функцией от х. ✓ Значение у, соответствующее заданному значению х, называют значением функции. ✓ Все значения, которые принимает независимая переменная, образуют область определения функции (обозначается $D(f)$). ✓ Все значения, которые принимает зависимая переменная, образуют множество значений функции (обозначается $E(f)$). ✓ Если функция задана формулой и область распределения функции не задана, то считают, что область определения состоит из всех значений независимой переменной, при которых эта формула имеет смысл. Например, область определения функции $f(x) = \frac{4x^2+1}{x-1}$ состоит из всех чисел, кроме х=1. ✓ Графиком функции называется множество всех точек, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции.	
Монотонность функции	✓ Функция $f(x)$ называется возрастающей на данном числовом промежутке Х, если большему значению аргумента $x \in X$ соответствует большее значение функции $f(x)$, т.е. для любых x_1 и x_2 из промежутка Х, таки, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. ✓ Функция $f(x)$ называется убывающей на данном числовом промежутке Х, если большему значению аргумента $x \in X$ соответствует меньшее значение функции $f(x)$, т.е. для любых x_1 и x_2 из промежутка Х, таки, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. ✓ Функция, только возрастающая или только убывающая на данном числовом промежутке, называется монотонной на этом промежутке.	
Четные и нечетные функции	✓ Функция $y = f(x)$ называется четной если она обладает следующими свойствами: 1) Область определения этой функции симметрична относительно точки О (начала координат). 2) Для любого значения х, принадлежащего области определения этой функции, выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. Например, $y = x^2$	

	 ✓ Функция $y = f(x)$ называется нечетной, если: 1) Область определения этой функции симметрична относительно точки О (начала координат). 2) Для любого значения x, принадлежащего области определения этой функции, выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$. Например, $y = x^3$ 	
Периодические функции	✓ Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$, что при любом x из области определения функции числа x-T и x+T также принадлежат этой области и выполняется равенство $f(x) = f(x+T) = f(x-T)$. В этом случае число T называется периодом функции $y = f(x)$. ✓ Если T- период функции, то Tk, где $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, также период функции. Следовательно, всякая периодическая функция имеет бесконечное множество периодов. На практике обычно рассматривают наименьший положительный период. Пример, периодических функций: $y = \sin x;\ период\ T = 2\pi$ $y = \cos x;\ период\ T = 2\pi$ $y = tgx;\ период\ T = \pi$ $y = ctgx;\ период\ T = \pi$	
Промежутки знакопостоянства	✓ Числовые промежутки, на которых функция сохраняет свой знак (т.е. остается положительной или отрицательной), называются промежутками знакопостоянства функции.  ✓ Например,	

<table>
<tr><td></td><td>$f(x)<0 \quad при \quad x\in(0;2)$</td><td></td></tr>
<tr><td>Линейная функция и ее график</td><td>

- ✓ Функция, заданная формулой $y=kx+b$, где k и b - некоторые числа, называется линейной.
- ✓ Областью определения линейной функции служит множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел, так как выражение $kx+b$ имеет смысл при любых значениях x.
- ✓ График линейной функции $y=kx+b$ есть прямая линия. Для построения графика, очевидно, достаточно двух точек. Например, $y=2x+1$,

<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>-0,5</td></tr>
<tr><td>y</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>



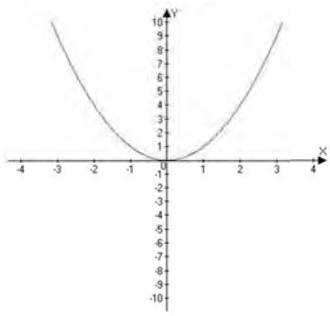
Свойства функции $y=kx+b$ при $k\neq 0$ и $b\neq 0$:

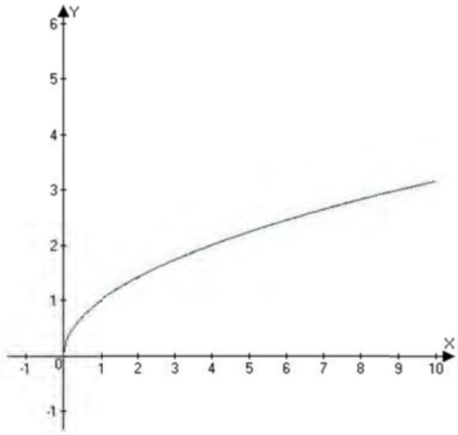
1) Область определения функции $y=kx+b$ - множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.
2) Множеством значений функции $y=kx+b$ является множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.
3) Функция $y=kx+b$ не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значений.
4) График функции $y=kx+b$ пересекает ось Ох в точке $\left(-\frac{b}{k};0\right)$, а ось Оу – в точке $(0;b)$.
5) Значение аргумента $x=-\frac{b}{k}$ является нулем функции $y=kx+b$.
6) Функция $y=kx+b$ не является ни четной ни нечетной.
7) Функция $y=kx+b$ является возрастающей на всей области определения, если k>0; является убывающей на всей области определения. Если k<0.
8) Функция $y=kx+b$ ($k>0$) принимает отрицательные значения (y<0) на промежутке $\left(-\infty;-\frac{b}{k}\right)$ и положительные значения (y>0) на промежутке $\left(-\frac{b}{k};+\infty\right)$.

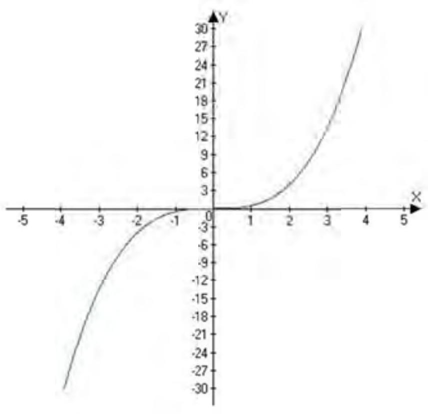
Функция $y=kx+b$ ($k<0$) принимает отрицательные значения (y<0) на промежутке $\left(-\frac{b}{k};+\infty\right)$ и положительные значения (y>0) на

</td><td></td></tr>
</table>

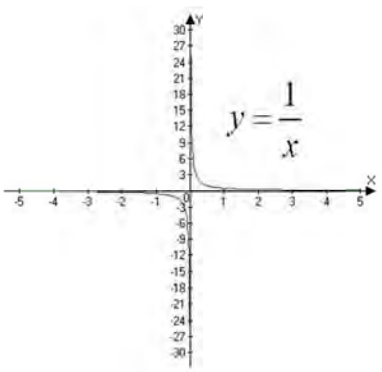
	промежутке $\left(-\infty;-\frac{b}{k}\right)$. ✓ Функцию вида $y=kx$ называют прямой пропорциональностью **Свойства функции** $y=kx$ **:** 1) Областью определения функции $y=kx$ ($k\neq 0$) является множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел 2) Множеством значений функции $y=kx$ ($k\neq 0$) является множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел 3) Функция $y=kx$ ($k\neq 0$) не имеет ни наименьшего ни наибольшего значения. 4) График функции $y=kx$ ($k\neq 0$) имеет единственную точку пересечения с осями координат $(0;0)$ - начало координат 5) Значение аргумента x=0 является нулем функции $y=kx$ ($k\neq 0$) 6) Функция $y=kx$ ($k\neq 0$) является нечетной 7) Функция $y=kx$ ($k\neq 0$) является возрастающей на всей области определения, если k>0 и убывающей, если k<0. 8) Функция $y=kx$ ($k>0$) принимает отрицательные значения (y<0) на промежутке $(-\infty;0)$ и положительные значения (y>0) на промежутке $(0;+\infty)$. Функция $y=kx$ ($k<0$) принимает отрицательные значения (y<0) на промежутке $(0;+\infty)$ и положительные значения (y>0) на промежутке $(-\infty;0)$.		
Квадратичная функция	✓ Функция, заданная формулой $y=ax^2+bx+c$, где $x,y-$ переменные, а $a,b,c-$, причем $a\neq 0$, называется квадратичной. ✓ Областью определения квадратичной функции является множество $\mathbb{R}$. ✓ Графиком функции $y=ax^2+bx+c$ является парабола. Если a>0, то ветви параболы направлены вверх. Если a<0, то ветви параболы направлены вниз. Осью симметрии параболы служит прямая $x=-\frac{b}{2a}$ ✓ Координаты вершины параболы $x_0=-\frac{b}{2a}$; $y_0=ax_0^2+bx_0+c=\frac{4ac-b^2}{4a}$ ✓ Квадратичную функцию $y=ax^2+bx+c$ всегда можно привести к виду $y=(x+k)^2+p$ путем выделения полного		

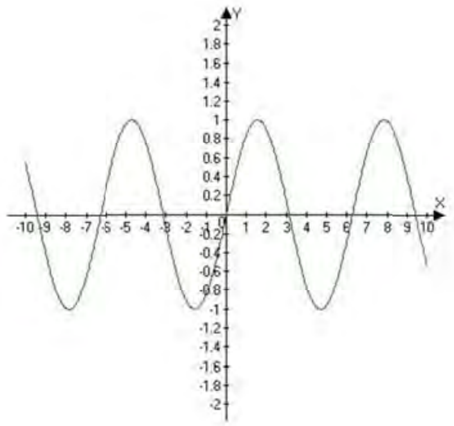
	квадрата: $y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c=$ $=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=$ $=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$ **Свойства функции $y=x^2$:** 1) Областью определения функции $y=x^2$ является множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел. 2) Множеством значений функции является множество $[0;+\infty)$ всех действительных чисел. 3) Значение функции y=0 является наименьшим, а наибольшего значения функция $y=x^2$ не имеет. 4) График функции $y=x^2$ имеет единственную точку пересечения с осями координат $(0;0)$ - начало координат 5) Значение аргумента x=0 является нулем функции $y=x^2$ 6) Функция $y=x^2$ является четной 7) Функция $y=x^2$ является возрастающей на промежутке $[0;+\infty)$ и убывающей на промежутке $(-\infty;0]$. 8) Функция $y=x^2$ принимает положительные значения на множестве $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, т.е. все точки этой параболы, кроме начала координат, лежат выше оси Ох. 		
Функция $y=\sqrt{x}$	Свойства функции $y=\sqrt{x}$: 1) Областью определения функции $y=\sqrt{x}$ является множество $[0;+\infty)$. 2) Множеством значения функции $y=\sqrt{x}$ является множество $[0;+\infty)$. 3) Значение функции y=0 является наименьшим, а наибольшего значения функция $y=\sqrt{x}$ не имеет. 4) График функции $y=\sqrt{x}$ имеет с осями координат единственную общую точку $(0;0)$ - начало координат.		

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
5) Значение аргумента x=0 является нулем функции $y=\sqrt{x}$.
6) Функция $y=\sqrt{x}$ принимает положительные значения (y>0) на промежутке $(0;+\infty)$.
7) Функция $y=\sqrt{x}$ не является ни четной, ни нечетной.
8) Функция $y=\sqrt{x}$ возрастающая на всей области определения.


</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Функция $y=x^3$</td>
<td>
Свойства функции $y=x^3$:
1) Областью определения функции $y=x^3$ является множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.
2) Множеством значений функции является множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.
3) Функция $y=x^3$ не имеет наибольшего и наименьшего значения.
4) График функции $y=x^3$имеет единственную точку пересечения с осями координат $(0;0)$ - начало координат
5) Значение аргумента x=0 является нулем функции $y=x^3$
6) Функция $y=x^3$ является нечетной
7) Функция $y=x^3$ является возрастающей на всей области определения.
8) Функция $y=x^3$ принимает положительные значения (y>0) на множестве $(0;+\infty)$ и отрицательные (y<0) на множестве $(-\infty;0)$.


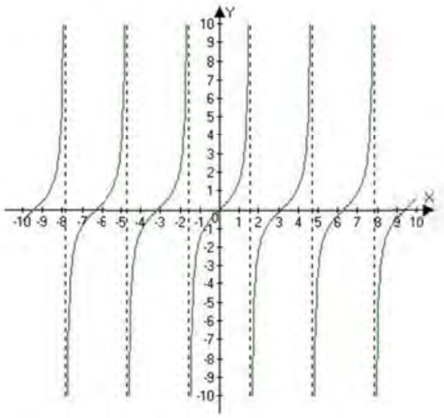
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Функция $y=\dfrac{k}{x}$</td>
<td>Свойства функции $y=\dfrac{k}{x}$ $(k\neq 0)$:</td>
<td></td>
</tr>
</table>

	1) Областью определения функции $y=\frac{k}{x}$ является множество $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. 2) Множеством значений функции является множество $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. 3) Функция $y=\frac{k}{x}$ не имеет наибольшего и наименьшего значения. 4) График функции $y=\frac{k}{x}$ не имеет точек пересечения с осями. 5) Функция $y=\frac{k}{x}$ не имеет точек пересечения с осями 6) Функция $y=\frac{k}{x}$ является нечетной 7) Функция $y=\frac{k}{x}$ $(k>0)$ является убывающей на каждом из промежутков $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$; функция $y=\frac{k}{x}$ $(k<0)$ является возрастающей на каждом из промежутков $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$. 8) Функция $y=\frac{k}{x}$ $(k>0)$ принимает положительные значения (y>0) на множестве $(0;+\infty)$ и отрицательные (y<0) на множестве $(-\infty;0)$; функция $y=\frac{k}{x}$ $(k<0)$ принимает положительные значения (y>0) на множестве $(-\infty;0)$ и отрицательные (y<0) на множестве $(0;+\infty)$ 	
Функция $y=\sin x$	✓ Область определения: $x\in\mathbb{R}$, множество всех действительных чисел ✓ Множество значений: $y\in[-1;1]$ ✓ Функция периодическая. Основной период равен $T=2\pi$ ✓ Функция нечетная ✓ Функция возрастает на промежутках $x\in\left[-\frac{\pi}{2}+2n\pi;\frac{\pi}{2}+2n\pi\right]$ и убывает на промежутках $x\in\left[\frac{\pi}{2}+2n\pi;\frac{3\pi}{2}+2n\pi\right]$, $n\in\mathbb{Z}$. ✓ Точки пересечения графика с осями: с осью Ох $x=n\pi$,	

	$n \in \mathbb{Z}$; с осью Оу: y=0. ✓ Интервалы знакопостоянства: $y>0$ при $x \in (2n\pi; \pi + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$; y<0 при $x \in (-\pi + 2n\pi; 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$. ✓ Наибольшее значение функции y=1 при $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$; наименьшее значение функции y=-1 при $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 		
Функция $y = \cos x$	✓ Область определения: $x \in \mathbb{R}$, множество всех действительных чисел ✓ Множество значений: $y \in [-1;1]$ ✓ Функция периодическая. Основной период равен $T = 2\pi$ ✓ Функция четная ✓ Функция возрастает на промежутках $x \in [-\pi + 2n\pi; 2n\pi]$ и убывает на промежутках $x \in [2n\pi; \pi + 2n\pi]$, $n \in \mathbb{Z}$. ✓ Точки пересечения графика с осями: с осью Ох $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$; с осью Оу: y=0. ✓ Интервалы знакопостоянства: $y>0$ при $x \in (2n\pi; \pi + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$; y<0 при $x \in (-\pi + 2n\pi; 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$. ✓ Наибольшее значение функции y=1 при $x = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$; наименьшее значение функции y=-1 при $x = \pi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. 		
Функция $y = tgx$	✓ Область определения: множество всех действительных чисел кроме $\frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ ✓ Множество значений: $y \in \mathbb{R}$ ✓ Функция периодическая. Основной период равен $T = \pi$ ✓ Функция нечетная		

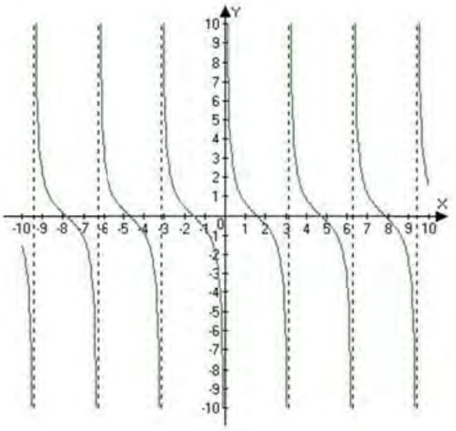
<table>
<tr>
<td></td>
<td>

- Функция возрастает на каждом из промежутков $x \in \left[-\frac{\pi}{2}+n\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.
- Точки пересечения графика с осями: с осью Ох $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$; с осью Оу: у=0.
- Интервалы знакопостоянства: $y > 0$ при $x \in \left(n\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi\right)$, $n \in \mathbb{Z}$; у<0 при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+n\pi; n\pi\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
- Наибольшего и наименьшего значения нет
- Прямые $x = \frac{\pi}{2}+n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ - вертикальные асимптоты графика функции $y = tgx$

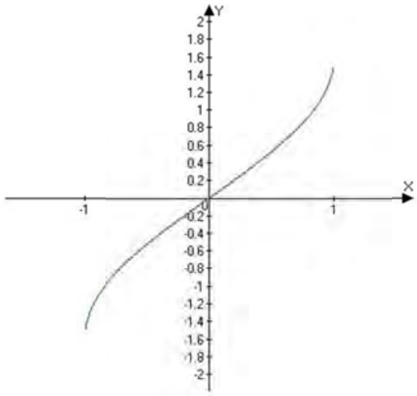
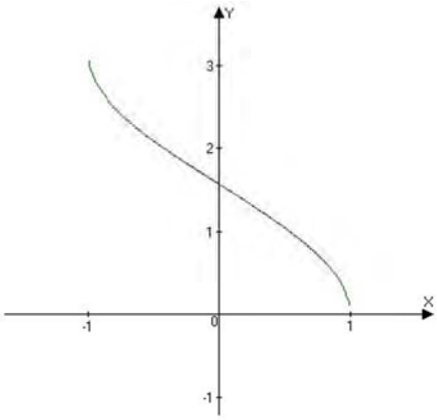


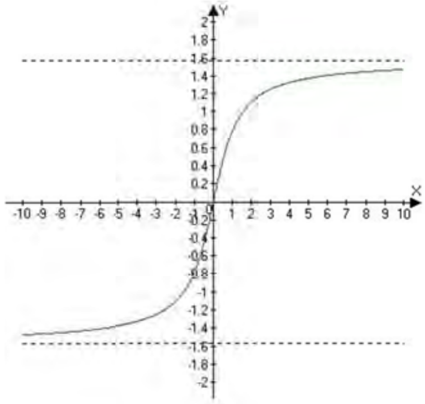
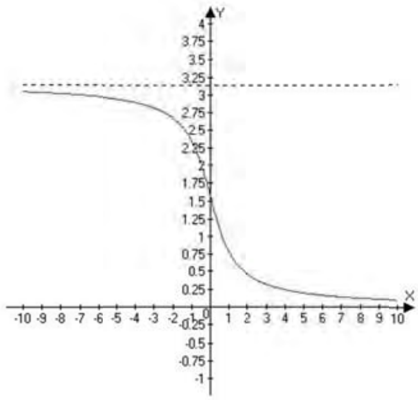
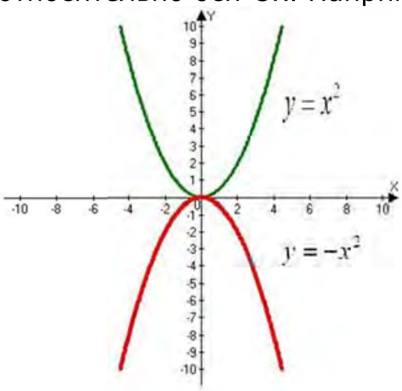
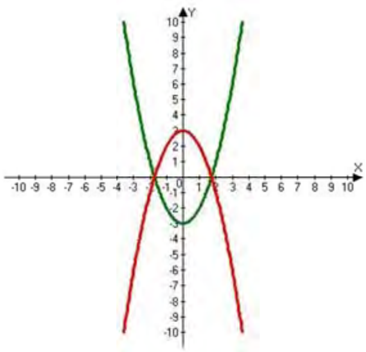
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Функция $y = ctgx$</td>
<td>

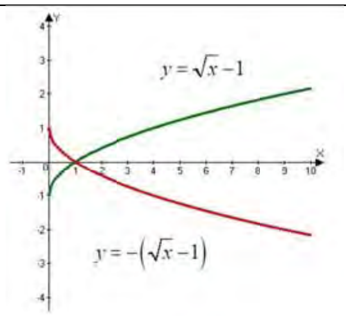
- Область определения: множество всех действительных чисел кроме $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$
- Множество значений: $y \in \mathbb{R}$
- Функция периодическая. Основной период равен $T = \pi$
- Функция нечетная
- Функция возрастает на каждом из промежутков $x \in [n\pi; \pi+n\pi]$, $n \in \mathbb{Z}$.
- Точки пересечения графика с осями: с осью Ох $x = \frac{\pi}{2}+n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$; с осью Оу: нет точек пересечения.
- Интервалы знакопостоянства: $y > 0$ при $x \in \left(n\pi; \frac{\pi}{2}+n\pi\right)$, $n \in \mathbb{Z}$; у<0 при $x \in \left(\frac{\pi}{2}+n\pi; \pi+n\pi\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
- Наибольшего и наименьшего значения нет
- Прямые $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ - вертикальные асимптоты графика функции $y = ctgx$



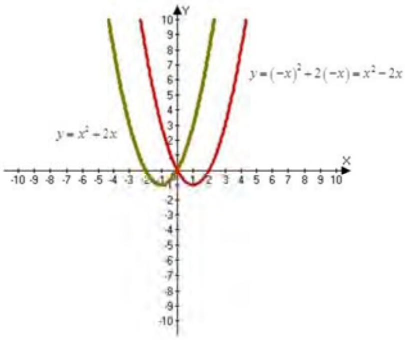
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

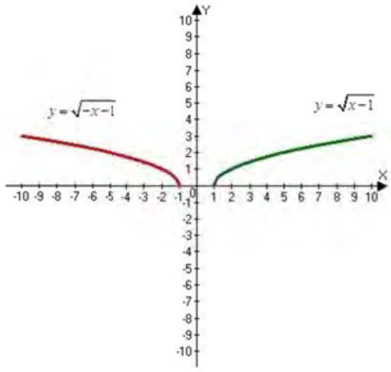
Функция $y=\arcsin x$	✓ Область определения $x\in[-1;1]$ ✓ Множество значений $y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ✓ Функция непериодическая ✓ Функция нечетная ✓ Возрастает на всей области определения ✓ Точки пересечения с осями: ось Ох: $x=0$, с осью Оу: $y=0$ ✓ Интервалы знакопостоянства: y>0 при $x\in(0;1]$; y<0 при $x\in[-1;0)$ ✓ Наибольшее значение y=$\frac{\pi}{2}$ при x=1; наименьшее значение y=$-\frac{\pi}{2}$ при x=-1.  	
Функция $y=\arccos x$	✓ Область определения $x\in[-1;1]$ ✓ Множество значений $y\in[0;\pi]$ ✓ Функция непериодическая ✓ Функция ни четная ни нечетная: $\arccos(-x)=\pi-\arccos(-x)$ ✓ Убывает на всей области определения ✓ Точки пересечения с осями: ось Ох: $x=0$, с осью Оу: $y=0$ ✓ Интервалы знакопостоянства: y>0 при $x\in[-1;1)$; y<0 нет ✓ Наибольшее значение y=π при x=-1; наименьшее значение y=0 при x=1.  	
Функция $y=\mathrm{arc}\,tgx$	✓ Область определения $x\in\mathbb{R}$ ✓ Множество значений $y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ✓ Функция непериодическая ✓ Функция нечетная ✓ Возрастает на всей области определения ✓ Точки пересечения с осями: ось Ох: $x=0$, с осью Оу: $y=0$	

	✓ Интервалы знакопостоянства: y>0 при $x \in (0;+\infty)$; y<0 при $x \in (-\infty;0)$ ✓ Наибольшего и наименьшего значения нет. ✓ Прямые $y = \frac{\pi}{2}$ и $y = -\frac{\pi}{2}$ являются горизонтальными асимптотами. 		
Функция $y = \operatorname{arc} ctgx$	✓ Область определения $x \in \mathbb{R}$ ✓ Множество значений $y \in [0;\pi]$ ✓ Функция непериодическая ✓ Функция ни четная ни нечетная: $\operatorname{arc} ctg(-x) = \pi - \operatorname{arc} ctg(-x)$ ✓ Возрастает на всей области определения ✓ Точки пересечения с осями: ось Ох:нет, с осью Оу: $y = \frac{\pi}{2}$ ✓ Интервалы знакопостоянства: y>0 при $x \in \mathbb{R}$; y<0 нет ✓ Наибольшего и наименьшего значения нет. ✓ Прямые $y = \pi$ и $y = 0$ являются горизонтальными асимптотами. 		
Преобразование графиков функции	✓ График функции $y = -f(x)$ может быть получен из графика функции $y = f(x)$ симметричным отображением относительно оси Ох. Например,  		

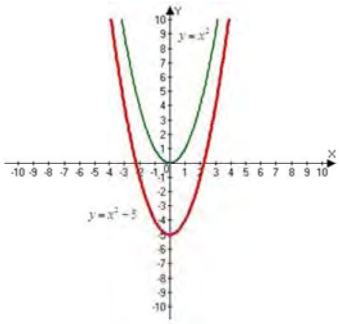


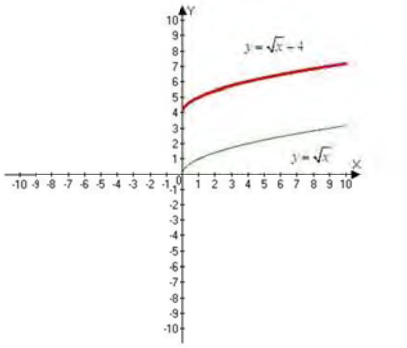
- График функции $y=f(-x)$ может быть получен из графика функции $y=f(x)$ симметричным отображением относительно оси Оу. Например,



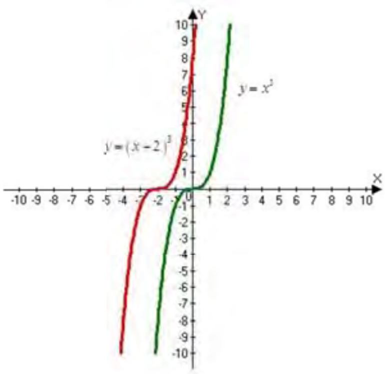


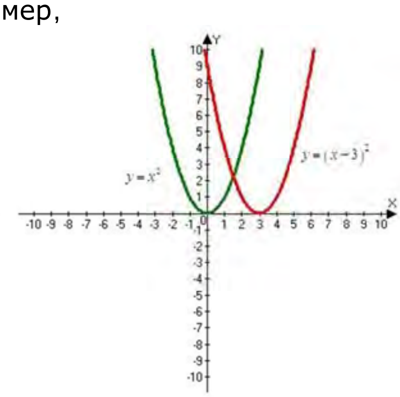
- График функции $y=f(x)+t$ получается сдвигом графика функции $y=f(x)$ вдоль оси Оу на расстояние $|t|$ (вверх при t>0; вниз при t<0). Например,



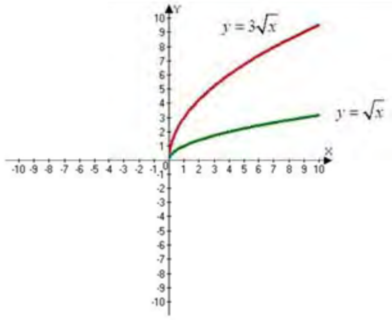


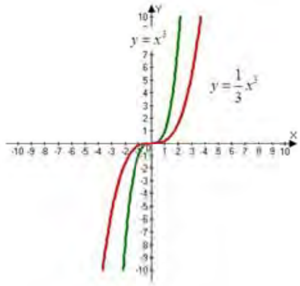
- График функции $y=f(x-s)$ получается сдвигом графика функции $y=f(x)$ вдоль оси Ох на $|s|$ единиц (вправо при s>0; влево при s<0). Например,



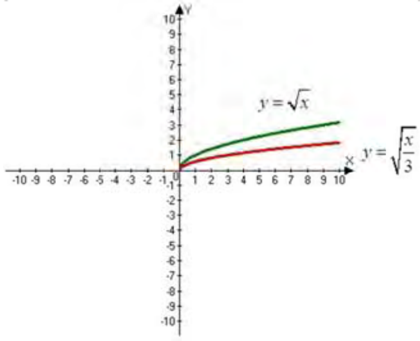


- График функции $y=kf(x)$ можно получить путем растяжения графика $y=f(x)$ вдоль оси oY в к раз, при k>1; сжатии в к раз, при $0<k<1$. Например,

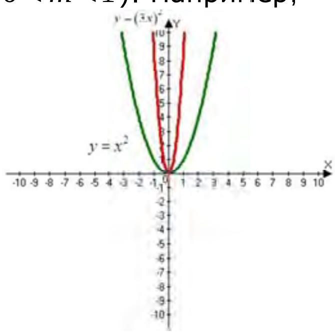




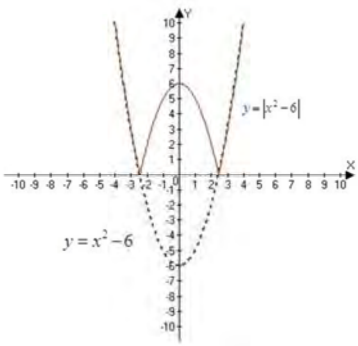
- ✓ График функции $y = f\left(\dfrac{x}{m}\right)$, где $m > 0$ можно получить путем растяжением графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox в m раз (при m>1); сжатием вдоль оси Ox в m раз (при

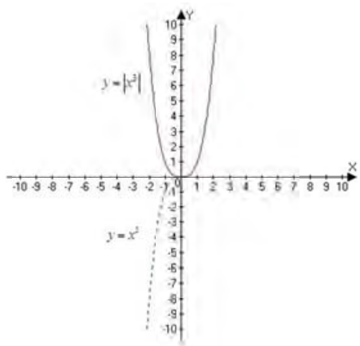


$0 < m < 1$). Например,

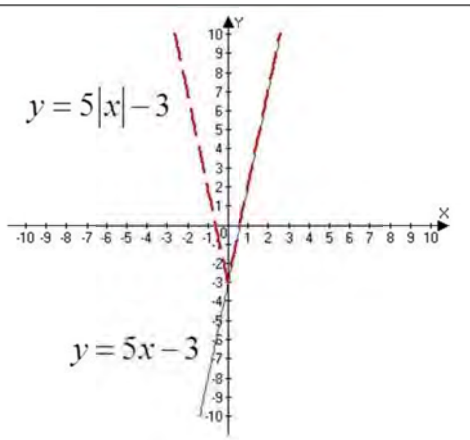


- ✓ График функции $y = \left| f(x) \right|$, можно части графика функции $y = f(x)$, лежащие выше оси абсцисс или на ней, оставить без изменения, а части, лежащие ниже оси абсцисс, отобразить симметрично относительно этой оси. Например,





- ✓ График функции $y = f\left(|x|\right)$ можно получить следующим образом: часть графика $y = f(x)$ с неотрицательными абсциссами оставить без изменения, а части графика $y = f\left(|x|\right)$ с отрицательными абсциссами получить симметричным изображением относительно оси Oy.

	 Например,	